



Vingt-Quatrième Tournoi des Villes
Automne 2002
Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : John et Mary choisissent chacun un nombre entier positif et le communiquent à Bill, qui écrit la somme de ces deux nombres sur un papier, et leur produit sur un autre. Il montre alors l'un de ces papiers à John et Mary qui y voient le nombre 2002 sans savoir s'il s'agit de la somme ou du produit. John regarde le nombre et déclare qu'il ne peut pas en déduire le nombre qu'a choisi Mary. Ayant entendu cela, Mary dit qu'elle ne sait pas non plus quel nombre a choisi John. Quel était le nombre choisi par Mary? [4 points]

Exercice 2 :

- Un contrôle a eu lieu dans une classe. On sait qu'au moins les deux tiers des questions de ce contrôle étaient difficiles : pour chacune de ces questions difficiles, au moins les deux tiers des élèves n'ont pas su répondre. On sait aussi qu'au moins les deux tiers des élèves ont bien réussi le contrôle : chacun d'eux a su répondre à au moins deux tiers des questions. Est-ce possible? [1 point]
- La réponse à la question précédente serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par trois quarts? [1 point]
- La réponse à la première question serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par sept dixièmes? [2 points]

Exercice 3 : On considère un ensemble fini de droites, deux à deux non parallèles, qui découpent le plan en plusieurs parties. On place un point A dans l'une de ces parties. Montrer qu'il existe un point B tel que, pour chacune des droites, A et B ne sont jamais du même côté, si et seulement si la partie qui contient A n'est pas bornée. [5 points]

Exercice 4 : Soient x, y, z trois nombres de l'intervalle ouvert $]0; \pi/2[$. Démontrer l'inégalité

$$\frac{x \cos x + y \cos y + z \cos z}{x + y + z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}.$$

[5 points]

Exercice 5 : On considère une suite infinie de nombres entiers positifs telle que le successeur x' de x est obtenu en ajoutant à x l'un de ses chiffres non nuls. Montrer que dans cette suite apparaît nécessairement un nombre pair. [5 points]