



Vingt-Quatrième Tournoi des Villes

Automne 2002

Épreuve normale, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Dans un polygone convexe à 2002 côtés, on trace certaines diagonales, qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone. Ce dessin décompose le polygone en 2000 triangles. Est-il possible qu'exactly la moitié de ces triangles aient leurs trois côtés qui soient des diagonales ? [4 points]

Exercice 2 : John et Mary choisissent chacun un nombre entier positif et le communiquent à Bill, qui écrit la somme de ces deux nombres sur un papier, et leur produit sur un autre. Il montre alors l'un de ces papiers à John et Mary qui y voient le nombre 2002 sans savoir s'il s'agit de la somme ou du produit. John regarde le nombre et déclare qu'il ne peut pas en déduire le nombre qu'a choisi Mary. Ayant entendu cela, Mary dit qu'elle ne sait pas non plus quel nombre a choisi John. Quel était le nombre choisi par Mary ? [5 points]

Exercice 3 :

- Un contrôle a eu lieu dans une classe. On sait qu'au moins les deux tiers des questions de ce contrôle étaient difficiles : pour chacune de ces questions difficiles, au moins les deux tiers des élèves n'ont pas su répondre. On sait aussi qu'au moins les deux tiers des élèves ont bien réussi le contrôle : chacun d'eux a su répondre à au moins deux tiers des questions. Est-ce possible ? [1 point]
- La réponse à la question précédente serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par trois quarts ? [2 points]
- La réponse à la première question serait-elle la même si l'on remplaçait partout deux tiers par sept dixièmes ? [2 points]

Exercice 4 : On place sur une table 2002 cartes qui sont numérotées par les entiers $1, 2, 3, \dots, 2002$ sur leur face visible. Deux joueurs, l'un après l'autre, retirent une carte de la table, jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus. Chaque joueur fait la somme des numéros des cartes qu'il a retirées et considère le chiffre des unités de cette somme. Le gagnant est celui des deux joueurs qui obtient ainsi le plus grand chiffre. Expliquer lequel des deux joueurs peut gagner (indépendamment de la façon dont l'autre joue) et quelle stratégie il doit adopter pour cela. [5 points]

Exercice 5 : On considère un secteur angulaire et un point A à l'intérieur. On trace trois droites passant par A et on considère leurs trois points d'intersection avec chacun des deux côtés du secteur angulaire. Est-il possible que sur chacun des deux côtés l'un des trois points soit le milieu du segment délimité par les deux autres ? [5 points]