# Vingt-Cinquième Tournoi des Villes
Automne 2003
Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

---

**Exercice 1 :** À Petitbourg, tout le monde était célibataire. Mais les deux entremetteurs de la ville savaient exactement quelles personnes se connaissaient. Un jour, le premier dit au second : « Je peux former des couples de telle manière que chaque homme brun se marie avec une femme qu'il connaît. » Le second lui répondit : « Moi, je peux m'arranger pour que chaque femme blonde se marie avec un homme qu'elle connaît. » Un amateur de problèmes mathématiques, surprenant cette conversation, s'écria alors : « Dans ce cas, vous pouvez choisir les couples de telle manière que ces deux conditions soient remplies en même temps ! » Avait-il raison ? `[4 points]`

---

**Exercice 2 :** Démontrez que tout entier strictement positif peut s'écrire sous la forme

$$3^{u_1} \times 2^{v_1} + 3^{u_2} \times 2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k} \times 2^{v_k}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ sont des entiers vérifiant $u_1 > u_2 > \cdots > u_k \geqslant 0$ et $0 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_k$. `[4 points]`

---

**Exercice 3 :** Une fourmi court sur une boite de la forme d'un parallélépipède rectangle. De son point de vue, la distance entre deux points est la plus petite distance qu'elle doit parcourir pour les relier. Est-il vrai que si la fourmi est sur l'un des coins, de son point de vue, le point le plus éloigné est le coin de la boîte opposé au sien ? `[6 points]`

---

**Exercice 4 :** Dans un triangle $ABC$, on appelle $H$ l'intersection des hauteurs, $I$ le centre du cercle inscrit, $O$ le centre du cercle circonscrit et $K$ le point où le cercle inscrit touche $[BC]$. Montrez que si $(IO)$ est parallèle à $(BC)$ alors $(AO)$ est parallèle à $(HK)$. `[7 points]`

---

**Exercice 5 :** Dans un jeu, deux joueurs jouent à tour de rôle. Le premier joueur a des cartes numérotées 2, 4, …, 2000 et le second a des cartes numérotées 1, 3, …, 2001 (une seule carte de chaque type). À son tour, un joueur montre une carte et l'adversaire, lorsqu'il a vu cette carte montre une de ses cartes. Celui qui a montré la carte la plus forte a gagné et marque un point. Les deux cartes sont alors éliminées du jeu et c'est ensuite au deuxième joueur de montrer sa carte le premier. C'est le joueur qui détient les cartes paires qui commence. Au bout de mille tours, lorsque le premier joueur n'a plus de carte et le second plus qu'une seule, la partie est terminée. Si les deux joueurs jouent de la meilleure manière possible, quels seront les scores à la fin de la partie ? `[7 points]`

---

**Exercice 6 :** Soit $O$ le centre de la sphère inscrite dans un tétraèdre $ABCD$. On suppose que la somme des aires des faces $ABC$ et $ABD$ est égale à la somme des aires des faces $CDA$ et $CDB$. Montrer que les milieux de $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$ ainsi que le point $O$ sont dans un même plan. `[7 points]`

---

**Exercice 7 :** Un tableau $m \times n$ est rempli de signes $+$ et de signes $-$. Un tableau est dit irréductible si on ne peut pas le changer en un tableau rempli uniquement de $+$ en faisant plusieurs fois de suite les opérations autorisées.

a) Si les opérations autorisées sont d'inverser tous les signes d'une ligne ou d'une colonne, montrer qu'un tableau irréductible contient forcément un sous-tableau irréductible $2 \times 2$. `[3 points]`

b) Si les opérations autorisées sont d'inverser tous les signes d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale (par diagonale, on entend toute diagonale reliant deux bords, de n'importe quelle longueur ; en particulier, les coins sont des diagonales de longueur 1), montrer qu'un tableau irréductible contient un sous-tableau irréductible $4 \times 4$. `[6 points]`