



Vingt-Cinquième Tournoi des Villes
Automne 2003
Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Soit n un entier naturel. On considère le plus grand diviseur impair de chacun des entiers de $n + 1$ à $2n$ (inclus). Démontrer que la somme de ces diviseurs vaut n^2 . [3 points]

Exercice 2 : Quel est le nombre minimal de carrés unité qu'il faut tracer pour obtenir le dessin d'un carré de taille 25 par 25 divisé en 625 carrés unité ? [4 points]

Exercice 3 : Un marchand et un acheteur disposent à eux deux de 1999 euros, en pièces et billets de 1 , 5 , 10 , 50 , 100 , 500 et 1000 euros. Le marchand vend son chat pour un nombre entier d'euros, et l'acheteur a assez d'argent pour l'acheter. Montrer que l'acheteur pourra repartir avec le chat et la monnaie exacte. [5 points]

Exercice 4 : Quatre triangles rectangles sont construits à l'extérieur d'un carré unité de sorte que leurs hypoténuses sont les quatre côtés du carré. On note A , B , C et D les angles droits des quatre triangles et O_1 , O_2 , O_3 et O_4 les centres des cercles inscrits dans ces triangles. Montrer que

a) l'aire du quadrilatère $ABCD$ est inférieure à 2 ; [3 points]

b) l'aire du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est inférieure à 1 . [3 points]

Exercice 5 : On découpe un tétraèdre de papier le long de certaines de ses arêtes, de sorte qu'on puisse le déplier à plat. Peut-il arriver que ce patron ne puisse pas être mis à plat sans chevauchement ? [6 points]