



Vingt-Cinquième Tournoi des Villes Automne 2003

Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : On prend une suite arithmétique de cent nombres entiers positifs. Est-il possible que deux nombres distincts de cette suite soient toujours premiers entre eux ?

(On rappelle qu'une suite est arithmétique si la différence entre deux termes successifs est toujours la même. Par ailleurs, deux entiers sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun positif est 1.) [4 points]

Exercice 2 : À Petitbourg, tout le monde était célibataire. Mais les deux entremetteurs de la ville savaient exactement quelles personnes se connaissaient. Un jour, le premier dit au second : « Je peux former des couples de telle manière que chaque homme brun se marie avec une femme qu'il connaît. » Le second lui répondit : « Moi, je peux m'arranger pour que chaque femme blonde se marie avec un homme qu'elle connaît. » Un amateur de problèmes mathématiques, surprenant cette conversation, s'écria alors : « Dans ce cas, vous pouvez choisir les couples de telle manière que ces deux conditions soient remplies en même temps ! » Avait-il raison ? [5 points]

Exercice 3 : Trouver tous les nombres entiers strictement positifs k tels qu'il existe deux entiers strictement positifs m et n tels que $m(m+k) = n(n+1)$. [5 points]

Exercice 4 : On marque un certain nombre de cases d'un échiquier de taille 15×15 de telle manière que si l'on place un fou sur n'importe quelle case de l'échiquier, il attaque au moins deux cases marquées. Combien de cases sont marquées au minimum ?

(Un fou attaque toutes les cases situées sur ses deux diagonales, y compris sa propre case. En particulier, une case marquée est attaquée même si une autre case marquée se situe entre elle et le fou.) [6 points]

Exercice 5 : Un point O se trouve à l'intérieur d'un carré $ABCD$. Montrez que la différence entre $\widehat{OAB} + \widehat{OBC} + \widehat{OCD} + \widehat{ODA}$ et 180° ne dépasse pas 45° . [7 points]

Exercice 6 : Une fourmi court sur une boîte de la forme d'un parallélépipède rectangle. De son point de vue, la distance entre deux points est la plus petite distance qu'elle doit parcourir pour les relier. Est-il vrai que si la fourmi est sur l'un des coins, de son point de vue, le point le plus éloigné est le coin de la boîte opposé au sien ? [7 points]

Exercice 7 : Dans un jeu, deux joueurs jouent à tour de rôle. Le premier joueur a des cartes numérotées 2, 4, ..., 2000 et le second a des cartes numérotées 1, 3, ..., 2001 (une seule carte de chaque type). Lors de chaque tour, un joueur montre l'une de ses cartes et l'adversaire, lorsqu'il a vu cette carte, montre l'une des siennes. Celui qui a montré la carte la plus forte a gagné et marque un point. Les deux cartes sont alors éliminées du jeu. Lors du tour suivant, c'est au deuxième joueur de montrer sa carte le premier. C'est le joueur qui détient les cartes paires qui commence. Au bout de mille tours, lorsque le premier joueur n'a plus de carte et le second plus qu'une seule, la partie est terminée. Si les deux joueurs jouent de la meilleure manière possible, quels seront les scores à la fin de la partie ? [8 points]