



Vingt-Cinquième Tournoi des Villes

Automne 2003

Épreuve normale, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Chacune des faces d'un parallélépipède rectangle dont les côtés sont de longueur 3, 4 et 5 est divisée en carrés unité. Peut-on écrire un nombre dans chacun de ces carrés de telle sorte que la somme des nombres dans chaque anneau de carrés (d'un carré de large) encerclant le parallélépipède soit égale à 120 ? [3 points]

Exercice 2 : Dans un polygone à 7 côtés $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, les diagonales A_1A_3 , A_2A_4 , A_3A_5 , A_4A_6 , A_5A_7 , A_6A_1 et A_7A_2 sont toutes de même longueur. De la même façon, les diagonales A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 , A_4A_7 , A_5A_1 , A_6A_2 et A_7A_3 sont toutes de même longueur. Le polygone est-il nécessairement régulier ? [4 points]

Exercice 3 : Soit n un entier naturel. On considère le plus grand diviseur impair de chacun des entiers de $n + 1$ à $2n$ (inclus). Démontrer que la somme de ces diviseurs vaut n^2 . [4 points]

Exercice 4 : On considère N points du plan, tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés. Chacun d'eux est relié à chacun des autres par un segment. Certains de ces segments sont rouges, les autres sont bleus. Les segments rouges forment une courbe fermée qui ne se recoupe pas (autrement dit, deux segments rouges n'ont de point commun que s'ils sont consécutifs dans la courbe). Il en va de même pour les segments bleus. Trouver tous les N pour lesquels c'est possible. [4 points]

Exercice 5 : Sur un damier de taille 1 par N , les 25 premiers carrés sont occupés par 25 jetons. Chacun d'eux peut se déplacer vers la case à sa droite, si celle-ci est vide, ou sauter par dessus le jeton à sa droite (si la case suivante est vide). Ils ne peuvent pas aller vers la gauche. Quel est le plus petit N pour lequel il est possible de placer les jetons dans 25 cases successives, mais en ordre inverse ? [5 points]