Vingt-Sixième Tournoi des Villes

Automne 2004

Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Deux fonctions f et g sont définies sur toute la droite réelle et sont inverses l'une de l'autre : $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$ pour tous nombres réels x et y. On sait que f peut être représentée comme somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique : $f(x) = kx + h(x)$, où k est un nombre et h une fonction périodique. Montrer que g peut aussi être représentée sous cette forme. [On dit qu'une fonction h est périodique si on peut trouver un nombre d non nul (la période) tel que $h(x + d) = h(x)$ pour tout x.] `[5 points]`

Exercice 2 : Deux personnes jouent au jeu suivant. Ils ont un tas de pierres non vide dont ils enlèvent des pierres à tour de rôle. Le permier joueur peut enlever 1 ou 10 pierres à chaque coup. Le deuxième joueur peut enlever m ou n pierres à chaque coup. Celui qui ne peut pas faire son coup selon les règles a perdu. On sait que, quel que soit le nombre de pierres dans le tas, le permier joueur peut toujours gagner indépendamment de ce que fait le deuxième. Quels sont les valeurs possibles de m et n ? `[5 points]`

Exercice 3 : Ivan a choisi deux nombres strictement positifs x et y. Il a écrit sur une feuille de papier les nombres $x + y$, $x - y$, xy et x/y. Il a ensuite montré la feuille à Pierre sans lui dire quel nombre est obtenu par quelle opération arithmétique. Montrer que Pierre peut retrouver x et y de manière unique. `[5 points]`

Exercice 4 : Un cercle de centre I est contenu dans un cercle de centre O. À toute corde $[AB]$ du grand cercle tangente au petit cercle on associe le centre du cercle circonscrit au triangle IAB. Trouver le lieu géométrique de ces centres. `[6 points]`

Exercice 5 : A et B sont deux rectangles. Avec plusieurs rectangles identiques à A on arrive a assembler (en les mettant les uns à côté des autres sans trous ni chevauchements) un rectangle semblable à B. Montrer qu'avec plusieurs rectangles identiques à B on arrivera à assembler un rectangle semblable à A. `[7 points]`

Exercice 6 : Soit n un nombre premier supérieur ou égal à 5. Un triangle est appelé « admissible » si tous ces angles sont de la forme

$$\frac{m \cdot 180^\circ}{n},$$

où m est un entier. Nous allons considérer que deux triangles admissibles sont identiques s'ils ont les mêmes angles, autrement dit, s'ils sont semblables. Au départ on pose sur la table un triangle admissible en papier. Toutes les minutes on prend un triangle de la table et on le coupe en deux triangles admissibles de telle façon qu'aucun des deux triangles ainsi obtenus ne soient semblable à aucun triangle qui reste sur la table. On repose ensuite les deux nouveaux triangles sur la table. Au bout d'un certain temps on s'aperçoit qu'il n'est plus possible de découper aucun triangle de cette façon. Montrer que, à cet instant, nous avons sur la table un ensemble complet de tous les triangles admissibles possibles. `[8 points]`

Exercice 7 : Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ peuvent être superposés par une rotation. (La demi-droite $[OA)$ se superpose avec $[OC)$ et la demi-droite $[OB)$ avec $[OD)$.) Un cercle est inscrit dans chacun des deux angles ; ces deux cercles se coupent aux points E et F. Montrer que les angles $\widehat{AOE}$ et $\widehat{DOF}$ sont égaux. `[8 points]`