Tournoi des Villes

Vingt-Sixième Tournoi des Villes

Automne 2004

Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Trois cercles passent par un même point X. Soient A, B et C leurs points d'intersection autres que X. Soit A' le deuxième point d'intersection de la droite (AX) avec le cercle circonscrit au triangle BCX. On définit de même les points B' et C'. Montrer que les triangles ABC', $AB'C$ et $A'BC$ sont semblables. `[3 points]`

Exercice 2 : Une boîte contient 100 billes de couleurs blanche, rouge et bleue. On sait que si l'on pioche dans la boîte 26 billes au hasard on trouvera nécessairement 10 billes de même couleur. Combien de billes faut-il piocher pour être sûr de trouver au moins 30 billes de même couleur ? `[3 points]`

Exercice 3 : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non constants. On sait que les identités $P(P(x)) = Q(Q(x))$ et $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ sont vérifiées. Est-ce qu'on a nécessairement l'identité $P(x) = Q(x)$? [On rappelle qu'un polynôme est une fonction de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.] `[4 points]`

Exercice 4 : On dira que deux entiers sont « presque égaux » si la différence entre eux est au plus 1. Combien y a-t-il de façons de représenter le nombre 2004 en tant que somme d'entiers strictement positifs deux à deux presque égaux ? La somme peut comporter un seul terme ou plus ; deux sommes qui ne se distinguent que par l'ordre des termes sont considérées comme identiques. `[4 points]`

Exercice 5 : On cherche à ranger les entiers de 1 à N dans un tel ordre que la moyenne de n'importe quel groupe de nombres successifs (à partir de 2 nombres) ne soit pas entière. Pour quels N est-ce possible ? `[5 points]`