



Vingt-Septième Tournoi des Villes

Automne 2005

Épreuve difficile, première-terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Pour quels n peut-on trouver n entiers distincts strictement positifs tels que la somme

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$$

soit entière ? [3 points]

Exercice 2 : Deux fourmis courent le long du bord d'une table polygonale. Tous les côtés de la table mesurent au moins 1 m. Les fourmis sont à chaque instant à 10 cm l'une de l'autre. Au départ les fourmis se trouvent sur un même côté de la table.

- Supposons que la table est convexe. Peut-on affirmer que les fourmis peuvent toujours faire un parcours de sorte que chaque fourmi soit passée par tous les points du bord ? [2 points]
- Maintenant la table n'est pas nécessairement convexe. Peut-on affirmer que les fourmis peuvent toujours faire un parcours de sorte que par chaque point du bord soit passée au moins une fourmi ? [3 points]

Exercice 3 : Sur chaque case d'un échiquier 8×8 est posée une tour. En un coup on peut retirer une tour qui menace un nombre impair d'autres tours. Quel est le nombre maximum de tours qu'on peut retirer de l'échiquier ? [Deux tours se menacent lorsqu'elles se trouvent sur la même ligne ou sur la même colonne de l'échiquier et qu'il n'y a pas d'autres tours entre les deux.] [5 points]

Exercice 4 : Plusieurs réels compris entre 0 et 1 (au sens large) sont disposés sur un cercle. Montrer qu'on peut diviser ce cercle en trois arcs de telle sorte que les sommes des nombres sur deux arcs quelconques diffèrent au plus de 1. (Si un arc ne contient aucun nombre, la somme associée vaut 0 par convention.) [6 points]

Exercice 5 : Dans un triangle ABC on trace les bissectrices $[AA_1]$, $[BB_1]$ et $[CC_1]$. On sait que l'angle \hat{A} mesure le double de l'angle \hat{B} qui lui-même mesure le double de l'angle \hat{C} . Montrer que $A_1B_1 = A_1C_1$. [7 points]

Exercice 6 : Une opération consiste soit à écrire deux fois le nombre 1 au tableau, soit à effacer deux nombres égaux n qui s'y trouvent déjà et écrire les nombres $n - 1$ et $n + 1$ à la place. Combien d'opérations faut-il au minimum pour pouvoir écrire le nombre 2005, sachant qu'au départ le tableau est vide ? [8 points]