Tournoi des Villes

Vingt-Septième Tournoi des Villes
Automne 2005
Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Est-ce que, entre deux entiers qui sont des carrés parfaits successifs, il peut exister deux entiers qui sont des cubes parfaits ? Autrement dit, peut-on trouver des entiers n, a et b vérifiant

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2 \quad ?$$

`[3 points]`

Exercice 2 : Un segment de longueur $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est tracé sur le plan. Peut-on, à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, construire un segment de longueur 1 ? `[3 points]`

Exercice 3 : Nous sommes en possession de 6 pièces de monnaie dont une est fausse. Le poids de la fausse pièce est différent de celui d'une vraie, mais nous ne connaissons ni l'un ni l'autre. Une balance permet de déterminer le poids de n'importe quel ensemble de pièces qu'on pose dessus. Comment trouver la fausse pièce en 3 pesées ? `[4 points]`

Exercice 4 : Sur les côtés d'un triangle rectangle ABC on construit trois carrés extérieurs au triangle. Soient D, E, F les centres de ces carrés. Montrer que le rapport de l'aire du triangle DEF à celle du triangle ABC est

a) supérieur ou égal à 1 ; `[2 points]`
b) au moins égal à 2. `[2 points]`

Exercice 5 : Un cube est posé sur le plan. On le fait rouler (autour de ses arêtes) de telle sorte qu'à la fin il revienne au même endroit avec la même face tournée vers le haut. Est-ce que cette face a pu tourner de 90° ? `[5 points]`