Vingt-Huitième Tournoi des Villes
Automne 2006
Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenus le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Nicolas a inventé un moyen mnémotechnique pour mieux retenir qui est ami avec qui dans sa classe. Dans un cercle il dessine une corde par élève de sorte que si deux élèves sont amis les deux cordes correspondantes se coupent et sinon elles ne se coupent pas. (Si deux cordes ont un sommet en commun on considère qu'elles se coupent.) Nicolas est certain qu'il arrivera à tracer un diagramme adapté quelle que soit sa classe. A-t-il raison ? `[4 points]`

Exercice 2 : Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. On choisit les points A', B' et C' sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement, de telle manière que (AA'), (BB') et (CC') soient les bissectrices du triangle $A'B'C'$. Montrer que ce sont aussi les hauteurs du triangle ABC. `[6 points]`

Exercice 3 : Le nombre $a = 0,12457\ldots$ a comme $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule le chiffre des unités de $n\sqrt{2}$. Montrer que a est irrationnel. `[6 points]`

Exercice 4 : Existe-t-il un prisme que l'on puisse découper en un certain nombre de pyramides de façon que chacune d'entre elles ait une de ses bases sur une base du prisme et le sommet opposé sur l'autre base du prisme ? `[6 points]`

(Le prisme et les pyramides ont comme bases des polygones quelconques.)

Exercice 5 : Pour tout n entier strictement positif, on pose $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ où $\frac{a_n}{b_n}$ est une fraction irréductible. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $b_{n+1} < b_n$. `[7 points]`

Exercice 6 : On dit qu'un jeu de 52 cartes est dans un ordre régulier si deux cartes consécutives ont soit la même couleur, soit la même valeur. De plus, on demande que ce soit vrai aussi pour la première et la dernière carte et que la première carte soit l'as de pique. Montrer que le nombre de manières de ranger un jeu de cartes de façon régulière est :

a) divisible par 12!. `[3 points]`

b) divisible par 13!. `[5 points]`

(il y a quatre couleurs dans un jeu de cartes : pique, cœur, carreau et trèfle)

Exercice 7 : Les nombres réels strictement positifs x_1, x_2, …, x_k vérifient

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{2}$$

et

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

a) Montrer que $k > 50$. `[3 points]`

b) Donner un exemple de nombres vérifiant ces conditions. `[3 points]`

c) Trouver la valeur minimale de k pour qu'un tel exemple existe. `[3 points]`