Vingt-Huitième Tournoi des Villes

Automne 2006

Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenus le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Trois entiers strictement positifs sont écrits au tableau. Pierre choisit deux entiers parmi les trois, note dans son carnet leur produit, puis enlève 1 au troisième entier. Il répète cette opération jusqu'à ce que l'un des trois entiers soit égal à zéro. Que vaut alors la somme de tous les nombres que Pierre a notés dans son carnet ? `[4 points]`

Exercice 2 : Un cercle est inscrit dans un quadrilatère. Les points de tangence consécutifs sont reliés par des segments, formant ainsi, avec le quadrilatère de départ, quatre triangles. Les centres des cercles inscrits dans ces triangles forment à leur tour un quadrilatère. Montrer que les diagonales de ce quadrilatère sont orthogonales. `[4 points]`

Exercice 3 : Dans un tableau 2006×2006 sont inscrits les nombres $1, 2, \ldots, 2006^2$. Montrer qu'on peut trouver deux cases, ayant soit un côté soit un sommet en commun, telles que la somme des deux nombres inscrits dans ces cases soit divisible par 4. `[4 points]`

Exercice 4 : Tous les nombres qui apparaissent dans une suite géométrique infinie $b_1, b_2, b_3, \ldots$ apparaissent également dans une suite arithmétique infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Montrer que la raison de la suite géométrique est entière. `[4 points]`

Exercice 5 : Peut-on inscrire un octaèdre régulier dans un cube de telle sorte que chaque sommet de l'octaèdre se trouve sur une arête du cube ? (Un octaèdre régulier a 8 faces qui sont des triangles équilatéraux. Il a 6 sommets avec 4 arêtes qui partent de chaque sommet.) `[5 points]`