



Vingt-Huitième Tournoi des Villes

Automne 2006

Épreuve normale, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenus le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Deux entiers strictement positifs, x et y sont écrits au tableau dans l'ordre croissant (c'est-à-dire $x \leq y$). Marie prend le premier nombre x et note dans son carnet son carré x^2 . Ensuite elle efface x et y du tableau et écrit à la place les nombres x et $y - x$, de nouveau dans l'ordre croissant. Elle répète cette opération jusqu'à ce que l'un des deux nombres soit nul. Quel est alors la somme des nombres que Marie a notés dans son carnet ? [4 points]

Exercice 2 : Sur une île déserte vivent les gens honnêtes, qui disent toujours la vérité, les menteurs, qui mentent toujours, et les malins qui peuvent aussi bien mentir que dire la vérité. Chaque habitant de l'île connaît l'identité de tous les autres habitants (et, bien entendu, la sienne). Vous pouvez leur poser des questions auxquelles on peut répondre par oui ou par non. Par exemple, vous pouvez demander : « Est-ce que cette personne-là est un menteur ? »

- Vous avez devant vous une personne honnête, un menteur et un malin. Comment déterminer qui est qui ? [1 point]
- Vous avez devant vous une personne honnête, un menteur et deux malins. Votre but est de connaître l'identité d'au moins une des personnes. Montrer que les deux malins, s'ils s'entendent à l'avance, peuvent vous empêcher d'atteindre votre but. [3 points]

Exercice 3 :

- 2007 entiers strictement supérieurs à 1 sont marqués au tableau. Montrer qu'il est possible d'en effacer un de sorte que le produit des autres soit égal à $a^2 - b^2$ pour un couple d'entiers $a, b \geq 1$. [2 points]
- 2007 entiers strictement supérieurs à 1 sont marqués au tableau, dont un est égal à 2006. Supposons que parmi les 2007 entiers il n'y en ait qu'un seul qu'on peut effacer pour que le produit des autres soit égal à $a^2 - b^2$ pour un couple d'entiers $a, b \geq 1$. Montrer que ce seul entier est alors 2006. [2 points]

Exercice 4 : Le côté $[BC]$ du triangle ABC est prolongé au-delà du point B jusqu'au point B' tel que $BB' = AB$. De même, on place un point C' sur (BC) au-delà de C . Les bissectrices des angles $\widehat{ABB'}$ et $\widehat{ACC'}$ se coupent en un point M . Montrer que les points A, B', M et C sont cocycliques. [4 points]

Exercice 5 : Un carré est découpé en n polygones égaux non convexes. Tous les côtés de tous les polygones sont parallèles aux côtés du carré. On sait que deux polygones du découpage ne peuvent jamais être superposés par une translation. Quelle est la plus grande valeur possible de n ? [4 points]