Vingt-Quatrième Tournoi des Villes

Printemps 2003

Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Un tétraèdre $ABCD$ est donné. Soient R le rayon de la sphère circonscrite, r le rayon de la sphère inscrite, a la longueur du côté le plus long, h la longueur de la hauteur la plus courte (tracée d'un sommet vers la face opposée). Montrer que $R/r > a/h$. `[4 points]`

Exercice 2 : Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels. Une suite infinie d'entiers naturels distincts $a_1, a_2, \ldots$ vérifie $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, $\ldots$ Quel peut être le degré de P ? `[5 points]`

Exercice 3 : Peut-on coller trois triangles en papier sur la surface d'un cube sans qu'ils se chevauchent de telle manière que le cube soit entièrement recouvert ? `[5 points]`

Exercice 4 : Un triangle ABC rectangle en C est inscrit dans un cercle. Soit K le milieu de l'arc de cercle BC qui ne contient pas A, soit N le milieu du segment $[AC]$ et soit M le point d'intersection de la demi-droite $[KN)$ avec le cercle. Les tangentes au cercle aux points A et C se coupent en E. Montrer que l'angle $\widehat{EMK}$ est droit. `[6 points]`

Exercice 5 : Pierre pense à un nombre entier supérieur à 100. Marie dit un entier d strictement supérieur à 1. Si le nombre de Pierre est divisible par d, alors Marie a gagné. Sinon Pierre soustrait d de son nombre et le jeu continue. Marie ne peut pas dire deux fois le même nombre. Lorsque le nombre de Pierre devient négatif, Marie perd. Est-ce qu'il existe une façon de jouer pour Marie qui lui permette de gagner quel que soit le nombre qu'a choisi Pierre ? `[6 points]`

Exercice 6 : Des signes "+" et "−" sont écrits dans les cases d'un carré 4×4. On applique plusieurs fois l'opération qui consiste à choisir une case, à changer le signe de cette case et de toutes celles qui ont un côté commun avec elle. Combien de dispositions différentes de signes peut-on obtenir ? `[7 points]`

Exercice 7 : On choisit plusieurs points dans un carré et des segments entre certains de ces points de telle manière que ces segments ne se coupent qu'en leurs extrémités et qu'ils découpent le carré en triangles. Tous les points sont extrémités d'au moins un segment. Est-il possible que les nombres de segments issus de chacun des points (y compris les quatre sommets du carré) soient tous pairs ? `[8 points]`