Vingt-Quatrième Tournoi des Villes

Printemps 2003

Épreuve difficile, quatrième-troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Georges écrit une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec des coefficients a, b, c entiers et strictement positifs. Pierre peut ensuite changer un ou deux signes "+" en des "−" ou laisser les signes inchangés. Si la nouvelle équation a deux racines entières distinctes, alors Georges a gagné, sinon Pierre a gagné. Est-ce que Georges peut choisir les coefficients de façon à gagner quels que soient les signes choisis par Pierre ? `[4 points]`

Exercice 2 : Un triangle ABC est donné. Soient R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, a la longueur du côté le plus long, h la longueur de la hauteur la plus courte. Montrer que $R/r > a/h$. `[4 points]`

Exercice 3 : Dans un tournoi qui oppose 15 équipes, chaque équipe joue exactement un match contre chacune des autres.

a) Prouver que lors d'au moins un match, la somme des nombres de matchs déjà joué par les deux équipes qui se rencontrent est impair. `[4 points]`

b) Est-il possible qu'un tel match soit unique ? `[3 points]`

Exercice 4 : Une plaque de chocolat a la forme d'un triangle équilatéral de côté n. Elle est divisée en petits triangles équilatéraux de côté 1 par des sillons (chaque côté est divisé en n parties égales et les points de division sur chaque paire de côtés sont reliés par des sillons parallèles au troisième côté). Deux personnes jouent au jeu suivant. En un coup un joueur peut casser la plaque le long d'un des sillons de sorte qu'il obtienne un morceau triangulaire. Le joueur mange ensuite le morceau en question et passe le reste de la plaque à son adversaire. Lorsqu'un joueur reçoit le dernier morceau (un petit triangle de côté 1) il a gagné. Par contre, si un joueur ne peut pas obtenir un morceau triangulaire en cassant la plaque, il a perdu. Déterminer, en fonction de n, lequel des deux joueurs a une stratégie qui lui permette de gagner quoi que fasse son adversaire. `[7 points]`

Exercice 5 : Dans un carré en bois 9×9, quel est le plus grand nombre de cases qu'on peut scier le long de leurs deux diagonales sans que le carré tombe en morceaux ? `[7 points]`

Exercice 6 : Un cercle est inscrit dans un trapèze de bases parallèles $[AD]$ et $[BC]$. Soit E le point d'intersection de ses diagonales. Montrer que l'angle $\widehat{AED}$ ne peut pas être aigu. `[7 points]`