



Vingt-Cinquième Tournoi des Villes Printemps 2004

Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Soit un cercle de centre O . On trace trois segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ tous de même longueur et tangents à ce cercle.

Montrer que le point où $[BC]$ touche le cercle, O et l'intersection de (AC) et (BD) sont alignés.
[4 points]

Exercice 2 : Soit a un entier strictement supérieur à 1 et b le nombre obtenu en écrivant a deux fois à la suite (si $a = 123$ alors $b = 123123$; bien sûr, a ne commence pas par 0).

Donner toutes les valeurs entières possibles que peut prendre b/a^2 . [4 points]

Exercice 3 : On suppose que le périmètre d'un quadrilatère convexe est 2004. L'une de ses diagonales a pour longueur 1001. L'autre diagonale peut-elle avoir une longueur de 1, 2 ou 1001 ?
[4 points]

Exercice 4 : La suite arithmétique $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ contient les nombres a_1^2, a_2^2 et a_3^2 .

Montrer que cette suite ne contient que des nombres entiers.

(On rappelle qu'une suite est arithmétique si la différence entre deux termes successifs est toujours la même.) [5 points]

Exercice 5 : Deux nombres de dix chiffres sont appelés *voisins* s'ils ne diffèrent que d'un chiffre (1234567890 est voisin de 1230567890).

Combien de nombres peut-on écrire au maximum de telle manière que l'on ne puisse pas en trouver deux qui soient voisins ? [5 points]