



## Vingt-Septième Tournoi des Villes Printemps 2006 Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

---

**Exercice 1 :** Un polygone convexe à 100 côtés est donné. Montrer qu'on peut trouver 50 points à l'intérieur de ce polygone de sorte que chaque sommet soit aligné avec au moins deux des points choisis. [4 points]

---

**Exercice 2 :** Peut-on trouver deux entiers strictement positifs  $n$  et  $k$  tels que l'écriture décimale du nombre  $2^n$  commence par celle de  $5^k$  tandis que l'écriture décimale de  $5^n$  commence par celle de  $2^k$ ? [5 points]

---

**Exercice 3 :** Montrer qu'en développant

$$(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^n, \quad n \geq 1,$$

on obtient un polynôme avec au moins un coefficient négatif. [5 points]

---

**Exercice 4 :** Soit un triangle  $ABC$ .  $A'$  est l'intersection de la bissectrice de l'angle  $\widehat{CAB}$  et de  $(BC)$ . On choisit un point  $X$  sur le segment  $[AA']$ . La droite  $(BX)$  coupe le segment  $[AC]$  au point  $B'$  tandis que la droite  $(CX)$  coupe le segment  $[AB]$  au point  $C'$ . Les segments  $[A'B']$  et  $[CC']$  se coupent en un point  $P$ , les segments  $[A'C']$  et  $[BB']$  se coupent en un point  $Q$ . Montrer que  $\widehat{PAC} = \widehat{QAB}$ . [6 points]

---

**Exercice 5 :** Montrer qu'on peut trouver un nombre infini de couples distincts d'entiers positifs tels que, pour chaque couple  $(a, b)$ , tous les chiffres composant  $a$ ,  $b$  et le produit  $ab$  soient supérieurs ou égaux à 7. [6 points]

---

**Exercice 6 :** 12 sauterelles se trouvent en 12 points distincts d'un cercle et divisent ainsi ce cercle en 12 arcs. Au signal « top chrono » toutes les sauterelles sautent simultanément dans le sens des aiguilles d'une montre. Chaque sauterelle atterrit exactement au milieu de l'arc qui se trouvait devant elle. Il se forme 12 nouveaux arcs et les sauterelles sont prêtes pour le saut suivant. Est-il possible qu'au moins une des sauterelles se retrouve au même point qu'au départ après

- a) 12 sauts? [4 points]
- b) 13 sauts? [3 points]

---

**Exercice 7 :** Une fourmi suit un parcours fermé le long des arêtes d'un dodécaèdre sans faire demi-tour à aucun moment. Son trajet lui fait parcourir chaque arête du dodécaèdre exactement deux fois. Montrer qu'il existe une arête que la fourmi a parcouru les deux fois dans le même sens.

[Un dodécaèdre est un polyèdre convexe composé de 12 pentagones réguliers égaux. Il a 30 arêtes et 20 sommets, avec exactement 3 arêtes (et donc 3 faces) qui se rencontrent à chaque sommet.]

[8 points]