



Vingt-Septième Tournoi des Villes  
Printemps 2006  
Épreuve normale, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

---

**Exercice 1 :** Un polyèdre convexe a 100 arêtes. On coupe les sommets de ce polyèdre avec un couteau tout près des sommets (autrement dit les plans de découpage ne se coupent pas entre eux à l'intérieur ou à la surface du polyèdre). Combien le polyèdre obtenu après le découpage possède-t-il

- a) de sommets? [1 point]
- b) d'arêtes? [2 points]

---

**Exercice 2 :** Existe-t-il deux fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier et à valeurs réelles, telles que  $p(x)$  soit paire et  $p(q(x))$  soit impaire et non identiquement nulle? [3 points]

---

**Exercice 3 :** Un réel  $a > 0$  est donné. On sait que l'inégalité  $10 < a^n < 100$  possède exactement 5 solutions  $n$  entières. Combien de solutions entières peut avoir l'inégalité  $100 < a^n < 1000$ ? (Donner toutes les possibilités.) [4 points]

---

**Exercice 4 :** Un quadrilatère  $ABCD$  est inscriptible dans un cercle et  $AB = AD$ . On prend un point  $M$  sur le côté  $[BC]$  et un point  $N$  sur le côté  $[CD]$  de telle sorte que l'angle  $\widehat{MAN}$  mesure la moitié de l'angle  $\widehat{BAD}$ . Montrer que  $MN = BM + ND$ . [5 points]

---

**Exercice 5 :** Alice a  $n^3$  petits cubes blancs  $1 \times 1 \times 1$ . Elle veut les assembler en un grand cube  $n \times n \times n$  entièrement blanc vu de l'extérieur. Quel est le plus petit nombre de faces des petits cubes que Romain doit peindre en noir pour l'en empêcher? Résoudre ce problème pour

- a)  $n = 3$ ; [3 points]
- b)  $n = 1000$ . [3 points]