Vingt-Septième Tournoi des Villes

Printemps 2006

Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Une table de billard est un rectangle 1×2 avec des trous aux angles et aux milieux des deux côtés les plus longs. Combien de boules faut-il, au minimum, placer dans l'intérieur de ce rectangle pour que chaque trou soit aligné avec au moins deux boules ? (Les trous et les boules sont considérés comme des points.) `[4 points]`

Exercice 2 : Montrer qu'on peut trouver 100 couples distincts d'entiers positifs tels que, pour chaque couple (a, b), tous les chiffres composant a, b et le produit ab soient supérieurs ou égaux à 6. `[4 points]`

Exercice 3 : Un triangle ABC a trois angles aigus. Sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ on construit, vers l'extérieur du triangle, deux rectangles $ABMN$ et $LBCK$ avec $AB = LB$ et $BM = BC$. Montrer que les droites (AL), (CM) et (NK) sont concourantes. `[5 points]`

Exercice 4 : Existe-t-il un entier naturel n tel que le premier chiffre de 2^n soit 5 et le premier chiffre de 5^n soit 2 ? `[5 points]`

Exercice 5 : Un tableau 2005×2006 est rempli par des 0, des 1 et des 2 de telle façon que la somme des nombres de chaque ligne et de chaque colonne est divisible par 3. Quel est le nombre maximum de 1 qu'il peut y avoir dans ce tableau ? `[6 points]`

Exercice 6 : Un *polygone curviligne* est un polygone dont les côtés sont des arcs de cercle (les auto-intersections sont interdites). Une droite qui coupe un polygone curviligne P partage son bord en deux parties (pas nécessairement d'un seul tenant). Existe-t-il un polygone curviligne P et un point A sur son bord tels que toutes les droites passant par A partagent le bord de P en deux parties de même longueur ? `[7 points]`

Exercice 7 : On a donné à Guillaume et à Pierre le même tableau 5×5 contenant 25 nombres deux à deux distincts. Guillaume choisit le plus grand nombre du tableau, qu'il note sur une feuille de papier, puis il raye la ligne et la colonne qui contiennent ce nombre. Il choisit ensuite le plus grand des nombres restants, qu'il note de nouveau sur sa feuille, et raye la ligne et la colonne correspondantes. Il continue ainsi jusqu'au bout. Pierre fait de même, sauf qu'il choisit à chaque fois le nombre le plus petit. Peut-il arriver que la somme des nombres que Pierre a notés sur sa feuille soit

a) strictement plus grande que la somme des nombres notés par Guillaume ? `[6 points]`

b) strictement plus grande que n'importe quelle autre somme de 5 nombres du tableau qu'on peut obtenir sans jamais prendre deux nombres dans la même ligne ou dans la même colonne ? `[2 points]`