Vingt-Septième Tournoi des Villes

Printemps 2006

Épreuve normale, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Dans un triangle ABC l'angle $\hat{A}$ vaut $60°$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe la droite (AC) en un point N. La médiatrice du segment $[AC]$ coupe la droite (AB) en un point M. Montrer que $BC = MN$. `[3 points]`

Exercice 2 : Dans un tableau $n \times n$ on met des 1 dans la première colonne, des 2 dans la 2-ième colonne, ..., des n dans la n-ième colonne. On efface ensuite tous les nombres qui se trouvent sur la diagonale reliant la case en haut à gauche à la case en bas à droite. On calcule la somme des nombres situés de chaque côté de cette diagonale. Montrer que l'une de ces deux sommes est exactement le double de l'autre. `[3 points]`

Exercice 3 : Un réel positif a est donné. On sait que l'inégalité $1 < na < 2$ possède exactement trois solutions entières n. Combien de solutions entières peut avoir l'inégalité $2 < na < 3$? (Donner toutes les possibilités.) `[4 points]`

Exercice 4 : Anne, Boris et Cyril sont assis autour d'une table et mangent des noix. Au départ c'est Anne qui a toutes les noix. Elle les divise en deux parties égales entre Boris et Cyril, puis, s'il lui reste une noix, elle la mange. Ensuite le même procédé se répète en rond (disons, dans le sens des aiguilles d'une montre). Chacun des trois partage successivement ses noix en deux parties égales entre ses voisins, puis, s'il lui reste une noix, il la mange. Au départ il y avait au moins 4 noix. Montrer que

a) au moins une noix sera mangée ; `[3 points]`

b) toutes les noix ne seront pas mangées. `[3 points]`

Exercice 5 : Alice a n^3 petits cubes blancs $1 \times 1 \times 1$. Elle veut les assembler en un grand cube $n \times n \times n$ entièrement blanc vu de l'extérieur. Quel est le plus petit nombre de faces des petits cubes que Romain doit peindre en noir pour l'en empêcher ? Résoudre ce problème pour

a) $n = 2$; `[2 points]`

b) $n = 3$. `[4 points]`