



## Vingt-Huitième Tournoi des Villes Printemps 2007 Épreuve difficile, première–terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

---

**Exercice 1 :** On trace la parabole d'équation  $y = x^2$ . On choisit ensuite quatre points distincts  $A, B, C$  et  $D$  sur cette parabole de telle façon que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  se coupent sur l'axe des ordonnées. Déterminer l'abscisse de  $D$  en fonction de celles de  $A, B$  et  $C$  que l'on notera  $a, b$  et  $c$ . [3 points]

---

**Exercice 2 :** Une figure convexe du plan possède la propriété suivante : n'importe quel triangle équilatéral de côté 1 peut être translaté de telle manière que tous ses sommets se retrouvent sur le bord de cette figure. Cette figure est-elle nécessairement un disque ? [5 points]

---

**Exercice 3 :** Soit  $f(x)$  un polynôme non constant à coefficients réels. Est-il possible que, pour toutes les valeurs de  $a$ , l'équation  $f(x) = a$  ait un nombre pair de solutions ? [5 points]

---

**Exercice 4 :** Noémie mélange un jeu de 52 cartes et dispose ces cartes en cercle faces visibles, en laissant un 53<sup>ième</sup> emplacement libre. Adrien, qui est dans une autre salle et ne peut donc pas voir le jeu, dit le nom d'une carte. Si la carte en question se trouve à côté de l'emplacement libre, Noémie l'y met sans le dire à Adrien ; sinon, elle ne fait rien. Adrien continue à dire des noms de cartes et le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'il décide d'arrêter le jeu.

- Adrien peut-il faire en sorte qu'à la fin du jeu, aucune des cartes ne puisse être à sa position initiale ? [4 points]
- Adrien peut-il faire en sorte qu'à la fin du jeu, la dame de pique ne puisse pas être à côté de l'emplacement libre ? [4 points]

---

**Exercice 5 :** Soit un octaèdre régulier de côté 1. À chaque sommet de cet octaèdre, on découpe une petite pyramide à base carrée dont l'un des sommets est le sommet de l'octaèdre, et dont la longueur des côtés partant de ce sommet est  $1/3$ . On obtient alors un polyèdre dont les faces sont des carrés et des hexagones réguliers. Est-il possible de paver (c'est-à-dire de remplir sans superposition) tout l'espace avec une infinité de copies de ce polyèdre ? [8 points]

---

**Exercice 6 :** On fixe un nombre irrationnel  $a_0$  tel que  $0 < a_0 < 1/2$ . On définit alors  $a_1$  comme le minimum de  $2a_0$  et  $1 - 2a_0$ , puis  $a_2$  comme le minimum de  $2a_1$  et  $1 - 2a_1$ , et ainsi de suite.

- Montrer que l'on peut trouver un entier  $n$  tel que  $a_n < 3/16$ . [4 points]
- Est-il possible que pour tout entier  $n$ ,  $a_n$  soit strictement supérieur à  $7/40$  ? [4 points]

---

**Exercice 7 :** Un triangle  $ABC$  et un point  $T$  sont donnés, avec la propriété que les trois angles  $\widehat{ATB}$ ,  $\widehat{BTC}$  et  $\widehat{CTA}$  mesurent  $120^\circ$ . On trace ensuite la droite symétrique à  $(AT)$  par rapport à  $(BC)$ , la droite symétrique à  $(BT)$  par rapport à  $(CA)$  et la droite symétrique à  $(CT)$  par rapport à  $(AB)$ . Montrer que ces trois droites sont concourantes. [8 points]