



Vingt-Huitième Tournoi des Villes
Printemps 2007
Épreuve normale, première–Terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Les cases d'un échiquier 9×9 sont coloriées en noir et blanc en alternance, les coins de l'échiquier étant blancs. Quel est le plus petit nombre de tours qu'il faut mettre sur cet échiquier pour que chaque case blanche soit menacée par au moins une tour ? (Une tour menace toutes les cases de la ligne et de la colonne dans lesquelles elle se trouve, y compris sa propre case) [3 points]

Exercice 2 : Le polynôme $x^3 + ax^2 + bx + c$ a trois racines sur l'intervalle ouvert $]0, 2[$. Montrer l'inégalité

$$-2 < a + b + c < 0.$$

[4 points]

Exercice 3 : Sur le plan sont tracés un cercle et la droite tangente à ce cercle en un point A . Sur la droite on choisit un point B , puis on tourne le segment $[AB]$ d'un certain angle autour du centre du cercle, obtenant ainsi un segment $[A'B']$, A' étant sur le cercle. Montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en son milieu. [4 points]

Exercice 4 : Une suite de 0 et de 1 est construite selon la règle suivante : le k -ième terme de la suite est un 0 si la somme des chiffres de k est paire et un 1 si elle est impaire. Le début de cette suite est donc : 1010101011010101001... Montrer que cette suite n'est pas périodique. [4 points]

Une suite est dite périodique s'il existe un entier d tel que deux termes de la suite espacés de d sont toujours égaux.

Exercice 5 :

- Un gâteau triangulaire a un angle obtus deux fois plus grand que l'un des deux autres angles. La boîte de ce gâteau, suite à une erreur de fabrication, a la forme du gâteau retourné. Montrer qu'on peut couper le gâteau en deux morceaux et les mettre dans la boîte sans les retourner. [3 points]
- Même question pour un gâteau triangulaire dont les angles mesurent 20° , 30° et 130° . [3 points]

Le gâteau et la boîte sont considérés comme des figures planes.