



Vingt-Huitième Tournoi des Villes Printemps 2007

Épreuve difficile, quatrième–troisième–seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Soit N un entier positif. Marie désire déterminer l'entier le plus proche de \sqrt{N} . Pour ce faire, elle cherche, parmi les nombres qui sont des carrés de nombres entiers positifs, le nombre a^2 qui est le plus proche possible de N . Elle pense que a est alors le nombre qu'elle cherche. Est-ce que sa méthode donne toujours la bonne réponse ? [3 points]

Exercice 2 : Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On choisit K , L , M et N respectivement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de telle façon que (KM) soit parallèle à (BC) et que (LN) soit parallèle à (AB) . On suppose de plus que le périmètre du triangle KBL est égal à 1. Quelle est l'aire du triangle MND ? [4 points]

Exercice 3 : Anne choisit vingt entiers strictement positifs consécutifs. Elle les recopie bout à bout dans un ordre quelconque en formant ainsi un nouveau nombre. Bertrand fait la même chose de son côté, mais en partant de vingt et un entiers strictement positifs consécutifs. Est-il possible qu'Anne et Bertrand aient obtenu le même nombre ? [5 points]

Exercice 4 : On dessine un polygone convexe à n côtés. On dessine ensuite certaines diagonales de ce polygone, qui peuvent se couper, mais dont trois ne sont jamais concourantes, sauf éventuellement en un sommet du polygone. Il se trouve que l'on obtient ainsi un découpage du polygone en triangles. Quel est le plus grand nombre possible de triangles ? [6 points]

Un polygone est convexe s'il n'a pas d'angle rentrant ou plat. Une diagonale est un segment qui relie deux sommets qui ne sont pas adjacents.

Exercice 5 : Déterminer toutes les suites arithmétiques finies strictement croissantes dont tous les termes sont des nombres premiers et tels que le nombre de termes de la suite soit strictement supérieur à sa raison. [7 points]

Une suite arithmétique est une suite dont la différence de deux termes consécutifs est toujours la même. Cette différence est appelée raison de la suite arithmétique.

Exercice 6 : Les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ d'un quadrilatère $ABCD$ sont de même longueur. M est le milieu du côté $[AD]$ et l'angle \widehat{BMC} mesure 90° . Déterminer l'angle entre les deux diagonales de ce quadrilatère. [8 points]

Exercice 7 : Noémie mélange un jeu de 52 cartes et dispose ces cartes en cercle faces visibles, en laissant un 53^{ième} emplacement libre. Adrien, qui est dans une autre salle et ne peut donc pas voir le jeu, dit le nom d'une carte. Si la carte en question se trouve à côté de l'emplacement libre, Noémie l'y met sans le dire à Adrien ; sinon, elle ne fait rien. Adrien continue à dire des noms de cartes et le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'il décide d'arrêter le jeu.

- Adrien peut-il faire en sorte qu'à la fin du jeu, aucune des cartes ne puisse être à sa position initiale ? [5 points]
- Adrien peut-il faire en sorte qu'à la fin du jeu, la dame de pique ne puisse pas être à côté de l'emplacement libre ? [5 points]