



## Vingt-Huitième Tournoi des Villes

Printemps 2007

Épreuve normale, quatrième–troisième-seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

---

**Exercice 1 :** Dans le plan, on trace sans lever le crayon une étoile à cinq branches, divisée en cinq triangles et un pentagone. Il s'avère que les cinq triangles sont isométriques. Est-ce que cela implique nécessairement que le pentagone est régulier (c'est-à-dire que ses côtés sont tous de même longueur et ses angles sont tous égaux)? [4 points]

---

**Exercice 2 :** Deux nombres à 2007 chiffres sont écrits au tableau. On sait qu'il est possible d'effacer 7 chiffres de chaque nombre de façon à obtenir deux nombres égaux. Montrer qu'il est alors aussi possible d'insérer 7 chiffres dans chaque nombre pour obtenir deux nombres égaux. [4 points]

---

**Exercice 3 :** Quel est le plus petit nombre de tours qu'il faut mettre sur un échiquier  $8 \times 8$  pour que chaque case blanche soit menacée par au moins une tour? (Une tour menace toutes les cases de la ligne et de la colonne dans lesquelles elle se trouve, y compris sa propre case) [4 points]

---

**Exercice 4 :** Trois réels non nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont donnés. On considère les six équations du second degré ayant comme coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  ( $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $bx^2 + cx + a = 0$ , ...). On sait que chacune de ces équations a au moins une solution réelle. Est-ce que cela implique que chacune de ces équations a nécessairement au moins une solution positive? [4 points]

---

**Exercice 5 :**

- a) Un gâteau triangulaire a l'un de ses angles qui est trois fois plus grand que l'un des deux autres. La boîte de ce gâteau, suite à une erreur de fabrication, a la forme du gâteau retourné. Montrer qu'on peut couper le gâteau en deux morceaux et les mettre dans la boîte sans les retourner. [1 point]
  - b) Même question pour un gâteau ayant la forme d'un triangle ayant un angle obtus deux fois plus grand que l'un des deux autres angles. [4 points]
- Le gâteau et la boîte sont considérés comme des figure planes.*