



Vingt-Huitième Tournoi des Villes

Automne 2006

Épreuve difficile, quatrième-troisième-seconde

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenus le plus, les points des sous-questions d'un même problème s'ajoutent. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : Deux polygones réguliers à 7 et 17 côtés sont contenus dans des anneaux délimités par le cercle inscrit et le cercle circonscrit de chaque polygone. Il s'avère que les deux anneaux ont la même aire. Montrer que les deux polygones ont les côtés de même longueur. [3 points]

Exercice 2 : Nicolas a inventé un moyen mnémotechnique pour mieux retenir qui est ami avec qui dans sa classe. Dans un cercle il dessine une corde par élève de sorte que si deux élèves sont amis les deux cordes correspondantes se coupent et sinon elles ne se coupent pas. (Si deux cordes ont un sommet en commun on considère qu'elles se coupent.) Nicolas est certain qu'il arrivera à tracer un diagramme adapté quelle que soit sa classe. A-t-il raison ? [5 points]

Exercice 3 : Le carré ci-dessous est magique : la somme des nombres dans chaque ligne, colonne ou diagonale est la même.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Montrer que

a) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$, [3 points]

b) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$. [3 points]

Exercice 4 : Un cercle de rayon R est inscrit dans un triangle aux angles aigus. On trace trois tangentes au cercle qui découpent le triangle en trois triangles rectangles et un hexagone. Le périmètre de l'hexagone vaut Q . Trouver la somme des diamètres des trois cercles inscrits dans les triangles rectangles. [6 points]

Exercice 5 : Un rectangle en papier d'aire 2 s'appelle un *bon emballage* si l'on peut couvrir entièrement les deux côtés d'un carré 1×1 avec ce rectangle sans découper le papier. Par exemple, les rectangles 1×2 et $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ sont des bons emballages.

a) Montrer qu'il existe d'autres bons emballages. [4 points]

b) Montrer qu'il existe une infinité de bons emballages. [3 points]

Exercice 6 : Pour tout n entier strictement positif, on pose $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ où $\frac{a_n}{b_n}$ est une fraction irréductible. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $b_{n+1} < b_n$. [8 points]

Exercice 7 : Le maître du jeu a dans les mains un jeu de 52 cartes. Les spectateurs ont le droit de lui poser la question « combien de cartes y a-t-il entre la carte x et la carte y ? » autant de fois qu'ils veulent en spécifiant les cartes x et y comme ils le souhaitent. À la fin ils doivent déterminer l'ordre des cartes dans le jeu (sans préciser si la première carte est celle d'en haut ou celle d'en bas). Or un des spectateurs a réussi à noter en cachette l'ordre des cartes. Combien de questions, au minimum, doit-il poser pour que les autres spectateurs puissent eux aussi déterminer l'ordre des cartes ? [9 points]