



Vingt-Quatrième Tournoi des Villes

Printemps 2003

Épreuve normale, première-terminale

(Le total des points est calculé à partir des trois problèmes pour lesquels vous en avez obtenu le plus. Les points sont indiqués entre crochets.)

Exercice 1 : 2003 euros sont placés dans des portefeuilles et les portefeuilles sont placés dans des poches. On sait que le nombre d'euros dans chaque poche est strictement inférieur au nombre total de portefeuilles. Existe-t-il forcément un portefeuille qui contient strictement moins d'euros qu'il n'y a de poches au total? [3 points]

Exercice 2 : Si 100 segments donnés peuvent être assemblés en un 100-gone, peut-il arriver qu'en choisissant un ensemble quelconque de ces segments avec moins de 100 éléments on ne puisse jamais les assembler en un polygone? [3 points]

Exercice 3 : Dans un triangle ABC on choisit un point M de telle façon que les rayons des cercles circonscrits aux triangles CMA , BMC et AMB soient supérieurs ou égaux au rayon du cercle circonscrit au triangle ABC . Montrer que les quatre rayons sont en fait égaux. [4 points]

Exercice 4 : Cent cartes en carton avec les numéros 00, 01, 02, ..., 99 sont mises dans l'ordre sur la table. Ensuite on permute les cartes de telle façon que chaque numéro s'obtienne à partir du précédent en ajoutant ou en soustrayant 1 à l'un de ses chiffres. (Par exemple, 29 peut être suivi de 19, 39 ou 28, mais pas de 30 ni de 20.) Quel est le plus grand nombre possible de cartes qui ont pu rester à leur place initiale? [5 points]

Exercice 5 : Montrer qu'on peut découper un rectangle $a \times b$, avec $b/2 < a < b$, en trois morceaux qui peuvent ensuite être assemblés en un carré. [5 points]